

Kolar-Šuper, Ružica–Kolar-Begović, Zdenka–Duka, Saša

NOVA KULTURA MATEMATIČKIH ZADATAKA

1. Uvod

U dosadašnjoj nastavi matematike koriste se u najvećoj mjeri zadaci koji su postavljeni takoda imaju uglavnom jedinstveno rješenje i poznat tijek rješavanja. Ovakvi zadaci senazivaju zatvoreni ili potpuni zadaci.

Matematičko obrazovanje treba biti usmjereno na razvoj kreativnog mišljenja gdje učenici mogu slobodno isprobavati vlastita originalna moguća rješenja. To znači izbjegavanjeuglavnom zastupljenemetode podučavanja koja naglašava „konvergentno razmišljanje“, u kojoj učenik pamti postojeća matematička pravila i teoreme i zatim ih primjenjuje na probleme s velikom spretnošću kako bi pronašao isključivo jedno rješenje. Budući da ovi zatvoreni problemi ne potiču kod učenika razvoj divergentnog mišljenja potrebno je uvesti nove kontekste koji im omogućuju aktivno sudjelovanje u procesu učenja.¹

Stoga je u nastavi matematike izuzetno korisno uvoditi zadatke koji imaju više korektnih rješenja (Slika 1) ili više načina rješavanja (Slika 2). Takvi zadaci se u literaturi nazivaju zadaci otvorenog tipa (open-ended problems).

70-ih godina u Japanu je provedeno niz projekata kojima je cilj bio razmotriti načine razvoja zahtjevnijih vještina učenikakroz matematičko obrazovanje. Pokazalo se da lekcije temeljene na rješavanju otvorenih problema imaju bogat potencijal za poboljšanje poučavanja i učenja matematike.²

Wu³ističe da matematičko istraživanje nije ništa drugo već svakodnevno suočavanje s otvorenim problemima te tako uvođenje ove vrsta problema u učionici dovodi matematičko obrazovanje jedan korak bliže pravoj matematici.

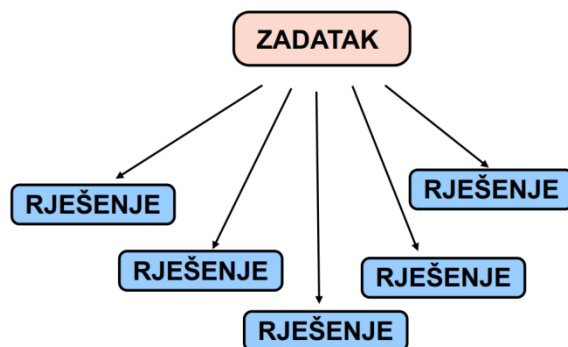
Pri uvrštavanju zadataka otvorenog tipa u nastavu pozornost treba pridati ocjenjivanju sposobnosti učenika prilikom rješavanja problema. Postignuća svakog učenika mogu se vrednovati prema kvantiteti, odnosno koliko je učenik ponudio različitih rješenja i koliko je različitih matematičkih ideja ponuđeno, te kvaliteti ili originalnosti. Kako matematičko obrazovanje zahtijeva promjene, otvoreni pristup je jedna od metoda za poboljšanje sposobnosti učenika za otkrivanje matematičkih ideja, rješavanje problema, uspostavljanje veza i matematičku komunikaciju. Kroz

¹ Oh Nam KWON–Jee Hyun PARK–Jung Sook PARK: *Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach*. Asia Pacific Education Review 2006/7. 51–61.

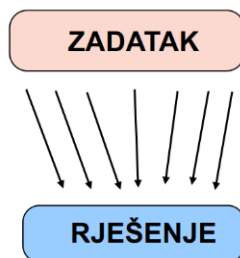
² Jerry P. BECKER–Shigeru SHIMADA: *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*, Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 1997.

³ Hung-Hsi WU: *The Role of Open-ended Problems in Mathematics Education*, Journal of Mathematical Behavior, 2000/7. 13.

rješavanje ovakvih zadataka učenici spoznaju da njihove metode rješavanja problema često mogu biti važnije od postizanja točnog odgovora.



Zadatak s više rješenja (Slika 1)



Zadatak s više načina rješavanja (Slika 2)

Korištenje otvorenih zadataka u nastavi matematike donosi višestruku korist i učenicima i nastavnicima. Rješavanjem zadataka otvorenog tipa učenici razvijaju dublje konceptualno razumijevanje, razvijaju strategije rješavanja problema te komunikacijske vještine. Učiteljima otvoreni zadaci mogu pružiti mogućnosti za procjenu matematičkog razmišljanja učenika, prepoznavanje miskoncepcija kod učenika te provođenje diferencirane nastave.

Sawada⁴ ističe prednosti i nedostatke rada sa zadacima otvorenog tipa. Tako od prednosti ističe da

⁴ Toshio SAWADA: Developing Lesson Plans. In: Jerry P. BECKER–Shigeru SHIMADA (ur.): *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, 1997. 23–35.

- učenici aktivnije sudjeluju u nastavi i češće izražavaju ideje,
- imaju više mogućnosti korištenja svojih matematičkih znanja i vještina,
- učenici s niskim uspjehom mogu odgovoriti na problem na neke svoje odgovarajuće načine,
- učenici imaju bogato iskustvo u užitku otkrivanja i odobravanju od strane drugih učenika drugih učenika.

Kao nedostatke spominje da nije jednostavno pripremiti smislene matematičke problemske situacije. Učitelji imaju poteškoća pri postavljanju problema, a učenici imaju poteškoća u odgovaranju i ponekad daju odgovore koji nisu matematički značajni.

Neki učenici s višim sposobnostima mogu doživjeti tjeskobu oko svojih odgovora, a neki učenici mogu osjećati da je njihovo učenje nezadovoljavajuće zbog poteškoća u jasnom koncipiranju.

Munroe⁵ ističe da korištenje otvorenih zadataka u nastavi potiče kritičko razmišljanje te ima praktične primjene u svakodnevnom životu učenika.

Na temelju rezultata⁶ pregleda literature doneseni su sljedeći zaključci:

1. Učenje matematike korištenjem otvorenog pristupa ima učinak na povećanje vještina kreativnog razmišljanja učenika i samoreguliranog učenja.
2. Otvoreni pristup ima za posljedicu povećanje sposobnosti kreativnog razmišljanja učenika u usporedbi s korištenjem konvencionalnog pristupa.
3. Rad korištenjem otvorenog pristupa odvija se kroz sljedeće korake:
 - nastavnik organizira aktivnosti učenja učenika,
 - nastavnik izlaže učenike otvorenim problemima,
 - nastavnik vodi i usmjerava učenike u rješavanju problema s različitim rješenjima i različitim načinima,
 - učenici prezentiraju svoje radove i uspoređuju ih s radovima drugih učenika pred razredom,
 - učenici donose zaključke pod vodstvom nastavnika.
4. Primjena otvorenog učenja od učitelja zahtijeva visoku kreativnost.

Otvoreni zadaci mogu biti specifični po sadržaju jer se bave onim matematičkim temama koje čine osnovu udžbenika i konvencionalnog matematičkog kurikuluma. Učitelji mogu uključiti takve zadatke kao dio svoje nastave bez ugrožavanja uspjeha učenika na naknadnim internim ili eksternim provjerama znanja iz područja matematike.⁷

⁵ Lloyd MUNROE: The open-ended approach framework. *European Journal of Educational Research*, 2015/4. 97–104.

⁶ Ali DAMSIR–Amir ZUBAIDAH–Kusnadi KUSNADI–Rian VEBRIANTO: *Literature Review: Mathematical Creative Thinking Ability, and Students' Self Regulated Learning to Use an Open Ended Approach*, *Malikussaleh Journal of Mathematics Learning*, 2002/4. 52–61.

⁷ Peter SULLIVAN–Doug CLARKE–Barbara CLARKE: *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning*, Springer, London, 2013.

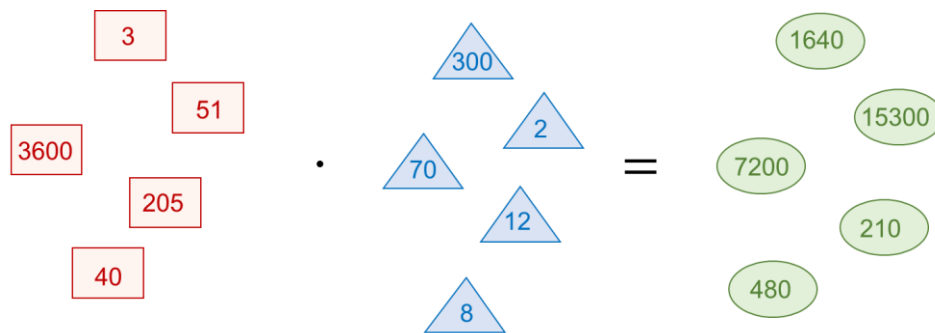
Kontekstualni otvoreni problemi mogu biti izazov za učenike kada se bave temama koje su susreli, ali nisu imali priliku o njima raspravljati. Izloženost takvim problemima njihovim pojednostavljivanjem omogućuje učenicima da cijene složenost s kojom se susreću u stvarnom svijetu, a ipak kroz proces rješavanja problema, povezuje učenje matematike s rješavanjem takvih problema.⁸

2. Zadaci otvorenog tipa

U ovom poglavlju navest ćemo primjere zadataka otvorenog tipa koji se mogu kreirati iz zadataka zatvorenog tipa.

Zadatak 1. (zatvorenog tipa) Izračunajte umnožak $51 \cdot 70$.

Zadatak otvorenog tipa. Pronađi barem tri točna izraza (računa) i zapiši ih (Slika 3).



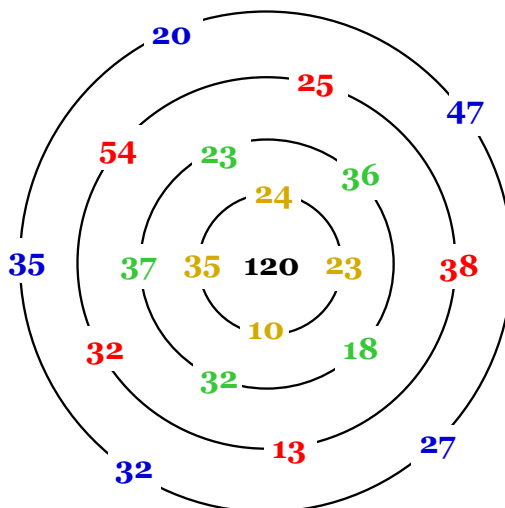
Zadatak otvorenog tipa koji uključuje množenje (Slika 3)

Napomena. Ovaj zadatak otvorenog tipa može se postaviti tako da za računsku radnju izaberemo radnju koju obrađujemo ili koju želimo uvježbati (zbrajanje, oduzimanje, množenje ili dijeljenje). Brojeve također možemo izabrati prema tome u kojem skupu brojeva obrađujemo ili uvježbavamo danu računsku radnju. Moguće je uvrstiti tri ili četiri skupa s lijeve strane jednakosti za uvježbavanje redoslijeda vršenja računskih radnji.

Računske radnje i redoslijed vršenja računskih radnji moguće je uvježbavati i zadacima otvorenog tipa kreiranim na sljedeći način.

⁸ Eric Chun Ming CHAN: *Using open-ended mathematics problems: a classroom experience (primary)*, Proceedings of the Redesigning pedagogy: research, policy, practice conference, Singapore, May–June 2005.

Zadatok otvorenog tipa. Kako proći kroz četvora vrata da se u zbroju dobije 120 (Slika 4). Kroz svaki krug dopušteno je proći samo jednom.



Zadatok otvorenog tipa koji uključuje zbrajanje (Slika 4)

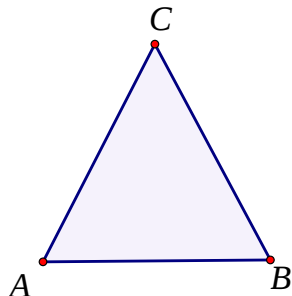
Napomena. I ovaj zadatok otvorenog tipa može se postaviti tako da za računsku radnju izaberemo radnju koju obrađujemo ili koju želimo uvježbati (zbrajanje, oduzimanje, množenje ili dijeljenje). Brojeve također možemo izabrati prema tome u kojem skupu brojeva obrađujemo ili uvježbavamo danu računsku radnju. Moguće je u zadatku postaviti zadane brojeve i tražiti da se do traženog rezultata dođe korištenjem računskih radnji prema vlastitom izboru, te korištenjem zagrada.

Zadatok otvorenog tipa. Napišite barem šest računskih izraza čiji je rezultat broj 22. Možete koristiti računske radnje prema vašem izboru.

Zadatok 2. (zatvorenog tipa) Izračunajte $50 - (4 + 6 \cdot 3)$.

Zadatok otvorenog tipa. Sastavite tekstualni zadatok koji odgovara izrazu $50\text{€} - (4\text{€} + 6 \cdot 3\text{€})$.

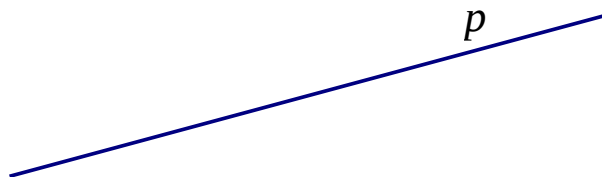
Zadatok 3. (zatvorenog tipa) Dan je jednakokrani trokut ABC . Naznačite os simetrije danog trokuta ABC (Slika 5).



Jednakokrāčan trokut ABC (Slika 5)

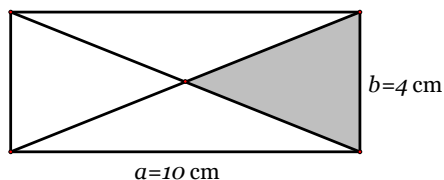
Zadatak otvorenog tipa.

- Konstruirajte trokut kome je dani pravac pos simetrije (Slika 6).
- Konstruirajte lik kome je dani pravac p os simetrije (Slika 6).



Pravac p - os simetrije (Slika 6)

Zadatak 4. (zadatak zatvorenog tipa) Izračunajte površinu osjenčanog dijela pravokutnika (Slika 7).



Pravokutnik (Slika 7)

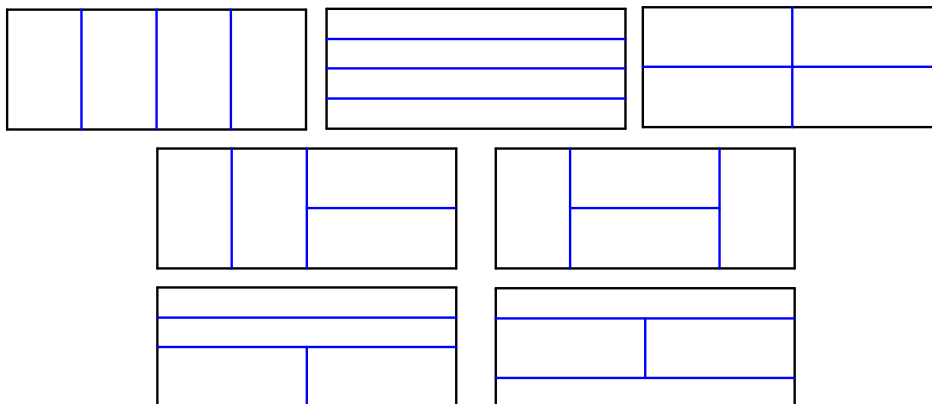
Zadatak otvorenog tipa. Zadani pravokutnik (Slika 8) podijeli na četiri dijela jednake površine.



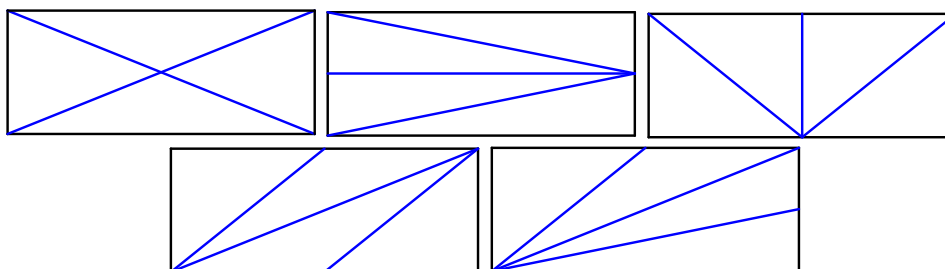
Pravokutnik koji treba podijeliti na dijelove jednakih površina (Slika 8)

Moguće su i sljedeće modifikacije postavljenog zadatka.

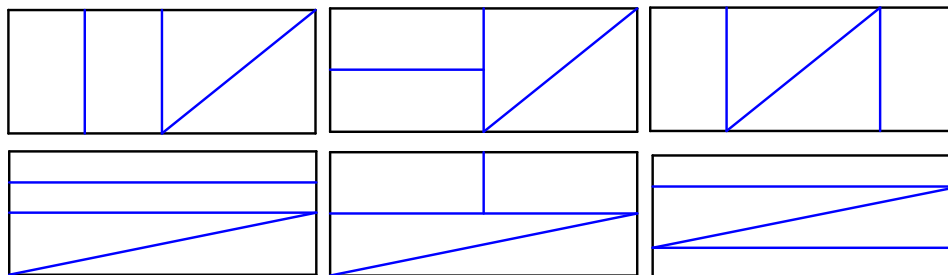
- Zadani pravokutnik podijeli na četiri pravokutnika jednake površine.
- Zadani pravokutnik podijeli na četiri trokuta jednake površine.
- Zadani pravokutnik podijeli na dva pravokutnika i dva trokuta jednake površine.
- Zadani pravokutnik podijeli na sukladne likove.
- Zadani pravokutnik podijeli na četiri dijela jednake površine.



Zadani pravokutnik podijeljen na četiri pravokutnika jednake površine (neka rješenja)



Zadani pravokutnik podijeljen na četiri trokuta jednake površine (neka rješenja)



Zadani pravokutnik podijeljen na dva pravokutnika i dva trokuta jednake površine (neka rješenja)

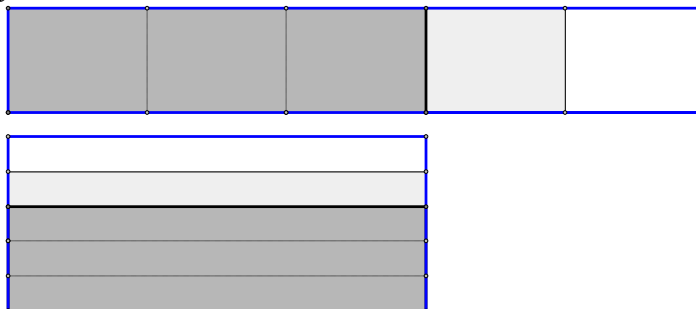
Napomena. Rješavanje zadataka ovog tipa pridonosi dubljem razumijevanju koncepta površine.

Zadatak 5. Ako je $\frac{3}{4}$ nekog broja 60 odredi $1\frac{1}{4}$ tog broja.

Zadatak otvorenog tipa. Nacrtani pravokutnik predstavlja $\frac{3}{4}$ cijelog pravokutnika. Nacrtajte pravokutnik koji predstavlja $1\frac{1}{4}$.



Neka rješenja zadatka:



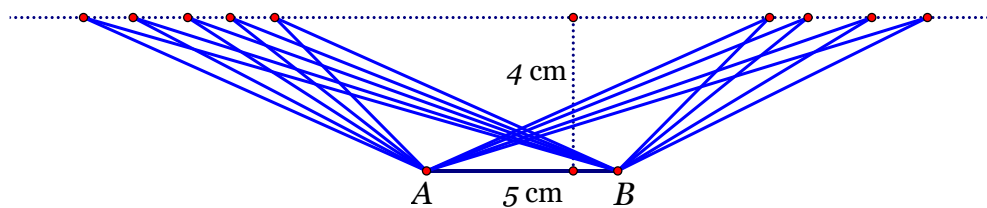


Zadatak 6. (zadatak zatvorenog tipa) Izračunaj površinu trokuta kome je dana duljina stranice $c=5$ cm i duljina visine na tu stranicu $v_c=4$ cm.

Zadatak otvorenog tipa.

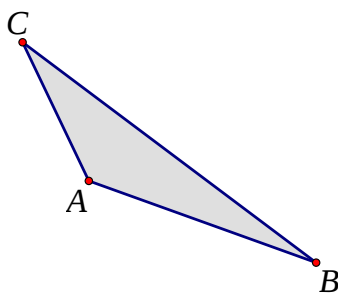
Konstruirajte tupokutan trokut površine 10 cm^2 .

Rješenje.



Tupokutni trokuti površine 10 cm^2 (neka rješenja)

Zadatak 7. (zadatak zatvorenog tipa) Odredi svojstva trokuta ABC (Slika 9) s obzirom na duljine stranica i mjere kutova tog trokuta.



Trokut ABC (Slika 9)

Zadatak otvorenog tipa.

Za opisivanje trokuta koristimo se različitim riječima.

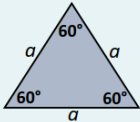
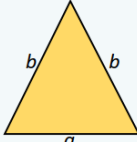
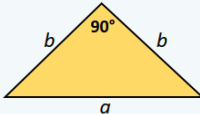
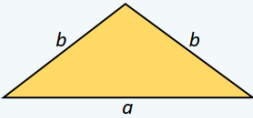
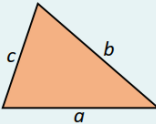
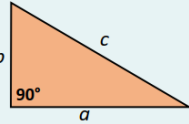
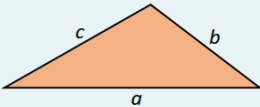
Trokute klasificiramo s obzirom:

na mjere kutova: šiljastokutne, pravokutne i tupokutne,

na duljine stranica: jednakostranične, jednakokračne i raznostranične.

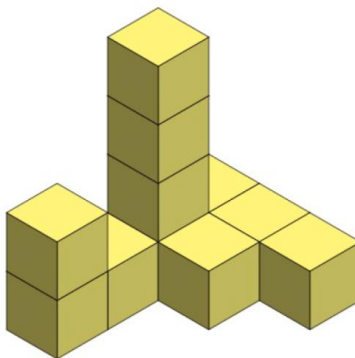
Kojim kombinacijama dviju riječi možete opisati trokut?

Rješenje.

	Šiljastokutan	Pravokutan	Tupokutan
Jednakostraničan			
Jednakokračan			
Raznostraničan			

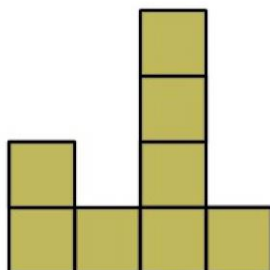
Trokuti s obzirom na duljine stranica i mjere kutova

Zadatak 8. (zadatak zatvorenog tipa) Nacrtajte nacrt, tlocrt i bokocrt tijela na Slici 10.



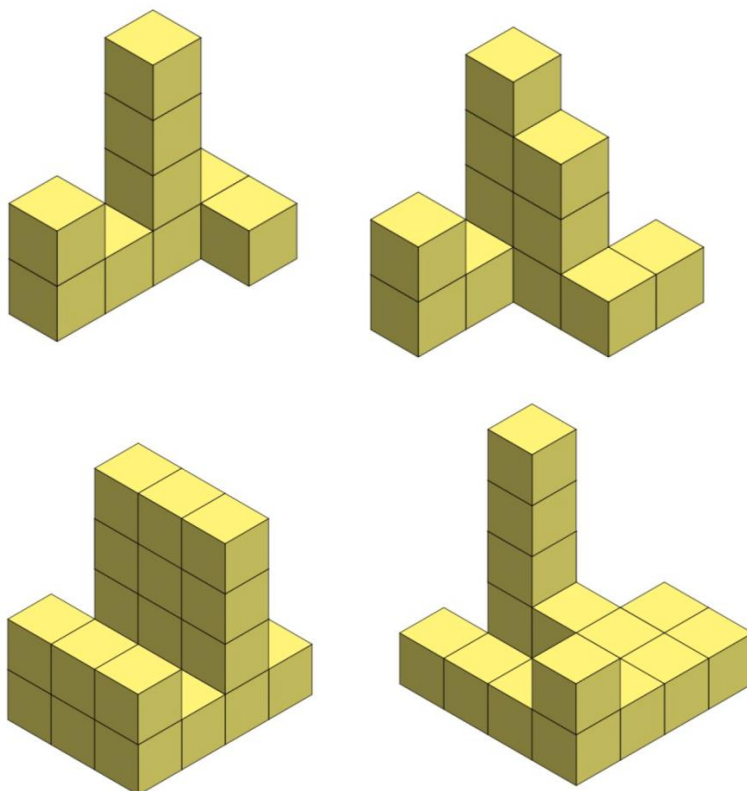
Tijelo složeno od kockica (Slika 10)

Zadatak otvorenog tipa. Od kockica složite tijelo čiji je bokocrt prikazan na Slici 11.



Bokocrt tijela (Slika 11)

Rješenje.



Neka tijela čiji je bokocrt prikazan na Slici 11

3. Strategije kreiranja zadataka otvorenog tipa

U ovom poglavlju ćemo navesti nekoliko strategija kreiranja zadataka otvorenog tipa te primjere zadataka za svaku strategiju.⁹

Strategija 1: kreiranje zadataka otvorenog tipa polazeći od odgovora

Koraci:

1. Napisati zadatak i smisliti odgovor.
2. Kreirati pitanje koje uključuje odgovor kao dio zadatka.

Primjeri:

- Možete li pronaći 5 istovrsnih objekata u ovoj prostoriji?
- Možete li pronaći 5 istovrsnih figura na slici?
- Skicirajte lik koji ima 5 vrhova.
- Pet učenika ima 21 špekulu. Nikoja dva učenika nemaju isti broj špekula. Koliko bi špekula mogao imati svaki učenik?
- Na slici poljoprivrednog dvorišta možete u daljini vidjeti 16 nogu. Nacrtajte koje bi to životinje mogle biti.

Strategija 2: kreiranje zadataka otvorenog tipa pomoću praznina

Koraci:

1. Zapisati cijelo pitanje uključujući odgovor.
2. Ukloniti neke dijelove pitanja.

Primjeri:

- Koji bi brojevi mogli pisati u ovoj jednakosti?
 $14 + ? = 30 + ?$
- Točno sam riješio zadatke sa zbrajanjem za domaću zadaću, ali moj писаč je ostao bez tinte. Sjećam se da je izgledalo ovako
 $\underline{\quad} 6 + \underline{\quad} = \underline{\quad} 0.$
Koje bi to znamenke mogle biti koje писаč nije ispisao?
- Točno sam riješio zadatak s oduzimanjem za domaću zadaću, ali moj je писаč ostao bez tinte. Sjećam se da je izgledalo ovako
 $5 \underline{\quad} - 3 \underline{\quad} = \underline{\quad} 3$
Koje bi mogle biti znamenke koje se nisu ispisale?

⁹ Peter SULLIVAN: *Four strategies for creating open-ended tasks*, Prime number, 2019/34. 19.

Strategija 3: kreiranje zadataka otvorenog tipa kroz personaliziranje

Ovo se može odnositi ili na same učenike ili oni mogu kreirati vlastito jedinstveno rješenje. U svakom slučaju, učenicima se daje do znanja da se moraju uključiti u rješavanje zadatka.

Primjeri:

- Nacrtajte grafikon koji pokazuje koliko ste umorni tijekom dana.
- Birate tepih za svoju sobu. U obliku kojeg lika biste izabrali tepih. Koji lik najviše opisuje vas?
- Što mislite koliki bi trebao biti budžet vaše obitelji tijekom ljetovanja? Obrazložite.

Strategija 4: kreiranje zadataka otvorenog tipa kroz forsiranje veza

- Jedan pristup je obraditi dva ili više pojmova i izgraditi veze između njih.
- Drugi pristup je predstavljanje metode rješavanja na dva načina.

Primjeri:

- Konstruirajte šiljastokutan trokut površine 12 cm^2 .
- Kvadrat sa stranicom duljine 4 cm ima isti opseg (16 cm) i površinu (16 cm^2).
Možete li pronaći pravokutnik koji ima isti opseg i površinu?
- Nađite zbroj

$$4+2+28+56$$

Nađite sada zbroj na drugi način. Što mislite koji je način lakši? Zašto?

Zaključak

Veliki broj istraživanja je potvrdio značajnu ulogu korištenja zadataka otvorenog tipa u nastavi matematike jer pozitivno djeluju na dublje razumijevanje matematičkog sadržaja kod učenika te povezivanje matematičkih koncepata. Višestruke su koristi zastupljenosti ove vrste zadataka u nastavi matematike i kod učenika i kod nastavnika. Rješavanje ovakve vrste zadataka omogućuje korištenje usvojenih matematičkih ideja pri rješavanju realnih problema. U radu su navedeni zadaci otvorenog tipa različitog karaktera te razmatrani načini kreiranja zadataka otvorenog tipa.

Literatura

- Ali DAMSIR–Amir ZUBAIDAH–Kusnadi KUSNADI–Rian VEBRIANTO: *Literature Review: Mathematical Creative Thinking Ability, and Students' Self Regulated Learning to Use an Open Ended Approach*, Malikussaleh Journal of Mathematics Learning, 2002/4. 52–61.
- Jerry P. BECKER–Shigeru SHIMADA: *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, 1997.
- Oh Nam KWON–Jee Hyun PARK–Jung Sook PARK: *Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach*. Asia Pacific Education Review 2006/7. 51–61.
- Lloyd MUNROE: *The open-ended approach framework*. European Journal of Educational Research, 2015/4. 97–104.
DOI: 10.12973/eujer.2015.p97
- Toshio SAWADA: Developing Lesson Plans. In: Jerry P. BECKER–Shigeru SHIMADA (ur.): *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, 1997. 23–35.
- Peter SULLIVAN, Doug CLARKE, Barbara CLARKE: *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning*, Springer, London, 2013.
- Peter SULLIVAN: *Four strategies for creating open-ended tasks*, Prime number, 2019/34. 19.
- Hung-Hsi WU: *The Role of Open-ended Problems in Mathematics Education*, Journal of Mathematical Behavior, 2000/7. 13.
DOI: 10.1016/0732-3123(94)90044-2
- Eric Chun Ming CHAN: *Using open-ended mathematics problems: a classroom experience (primary)*, Proceedings of the Redesigning pedagogy: research, policy, practice conference, Singapore, May–June 2005. <https://www.nctm.org/classroomresources/>

Abstract

A NEW CULTURE OF MATHEMATICAL ASSIGNMENTS

The paper discusses the open approach in mathematics education. Open tasks include tasks that have multiple solutions or multiple ways to solve the problem. Numerous authors point out the many advantages of using open-ended tasks in mathematics education. The open-ended approach is an effective way to improve students' ability to discover mathematical ideas, develop deeper conceptual understanding, solve problems, make connections between concepts and mathematics communication. Open-ended tasks provide teachers with the opportunity to assess students' mathematical thinking, identify students' misconceptions and implement differentiated instruction. The paper gives some examples of open-ended tasks and discusses strategies for creating open-ended tasks.

Keywords: mathematics education, open approach, open-ended task, creativity